Conceptos previos

SISTEMA DE REFERENCIA: Es un sistema coordenado relativo al cual se toman medidas físicas: Un sistema de referencia inercial es aquel que se mueve a velocidad constante, es decir que no esta adecuado.

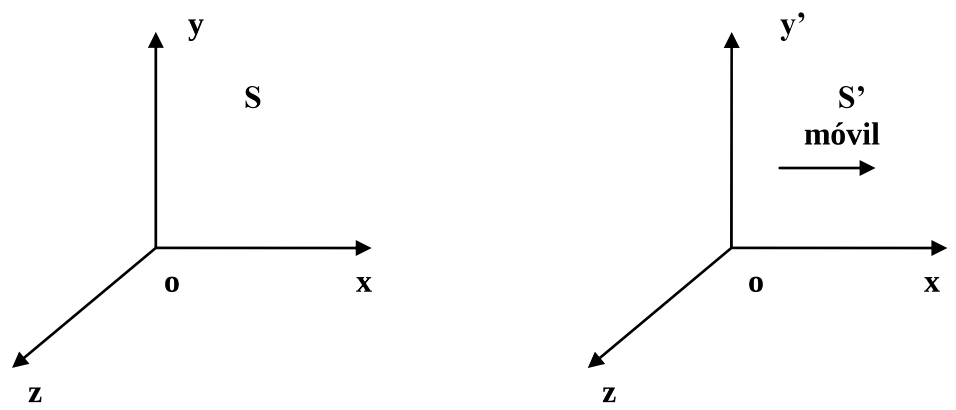
LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD: Fue propuesta por Albert Einstein y se ocupa del estudio del movimiento de los cuerpos a velocidad constante.

Los postulados de la relatividad especial propuestos por Einstein fueron:

1.- Las leyes de la Física son las mismas para todo sistema inercial. Por lo tanto, todo movimiento es relativo. La velocidad de los objetos solo puede darse en relación a otros cuerpos. Es imposible determinar la velocidad absoluta de un objeto.
2.- La rapidez de la luz en el vacío "c", tiene el mismo valor para cualquier observador, independiente del movimiento de la fuente o del movimiento del observador.

DEDUCCIÓN DE LA MÉTRICA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Consideremos dos marcos de referencia S y S'.



Donde $\overrightarrow{ox} // \overrightarrow{o'x'}$

Si el sistema S se mueve con velocidad V y el sistema S' lo hace con velocidad v.

La velocidad del móvil con respecto a S es:

V'=v+V

Si lo que ocurre en el sistema S' es un suceso luminoso, entonces v=c, por lo tanto la velocidad observada desde el sistema referencial S será:

V'=c+V

Esta última ecuación no tiene validez física ni matemática, ya que no se han detectado velocidades mayores que la velocidad de la luz (c).

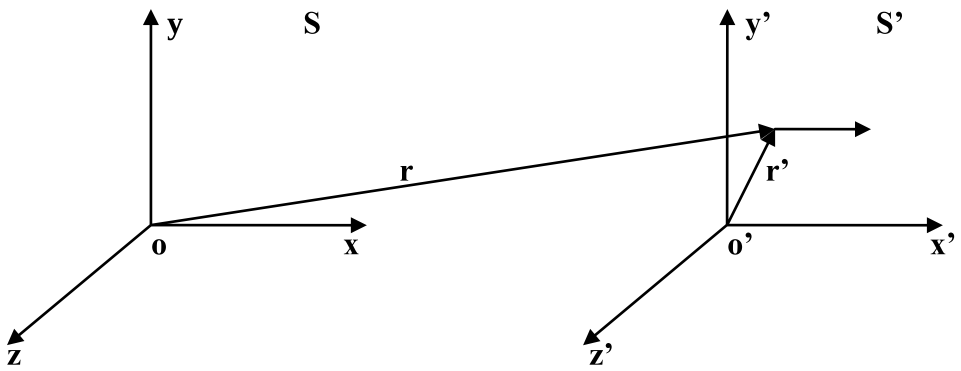
Albert Einstein postula que en ausencia de campos gravitatorios, es decir campos donde no existen aceleraciones, entonces V constante para todo observador inercial (ausencia de aceleraciones), entonces V' también es constante.

De aquí se postulan para la relatividad especial

Primer postulado: Para todo observador inercial, las leyes físicas son independientes de los sistemas inerciales en los cuales se manifiesta un fenómeno.

Segundo postulado: la velocidad de la luz es constante y tiene un valor finito, que corresponde a 3×10^8 m/s.

Ahora consideremos la siguiente situación: Dos sistemas inerciales que miden la ocurrencia de un fenómeno luminoso A en uno de ellos (S'), el cual es medido desde S y S'.



Donde $\overrightarrow{ox} // \overrightarrow{o'x'}$

La posición del objeto A medida desde cada sistema será

$r'^2=x'^2+y'^2+z'^2$ .. para..o'

$r^2=x^2+y^2+z^2$ .. para..o

(Diagonal de un paralelepípedo)

Si la señal luminosa fue emitida cuando o y o' coincidían y luego comenzaron a desplazarse por el espacio, el desplazamiento de este fenómeno con respecto a o es r y con respecto a o' es r'.

Como se trata de un fenómeno luminoso, entonces: r=ct y r'=c't'.

Ahora como c es constante, de cuerdo al segundo postulado, necesariamente $t \neq t'$, ya que obviamente $r \neq r'$.

Donde t y t' corresponden al tiempo de ocurrencia del fenómeno medido desde los marcos inerciales o y o'.

Nota: en el caso del tiempo absoluto (tiempo asociado a un marco referencial) t=t'.

Retomando las ecuaciones anteriores:

$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ Se obtiene: $x'^2 + y'^2 + z'^2 - ct'=0$ y también:

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ Se obtiene: $x^2 + y^2 + z^2 - ct = 0$

Ecuaciones que caracterizan a la métrica Euclidiana del espacio en el cual el suceso luminoso tiene lugar.

Aplicando las transformaciones de Lorentz para dos sistemas se tiene:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$z' = z$$

$$y' = y$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Donde x’, y’, z’ y t’ corresponden a las coordenadas con respecto a o’.
V: Velocidad asociada a ambos sistemas (V=constante)

Las transformaciones de Lorentz inversas se expresan como: x, y, z y t con respecto a o r.

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$z = z'$$

$$y = y'$$

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Las coordenadas de Lorentz son en el fondo relaciones de coordenadas físicas de un sistema con respecto a otro.

Se puede demostrar que las transformaciones de Lorentz cuando V es mucho menor que c, se reducen a las transformaciones de Galileo.

En efecto, si V<<c, entonces el cuociente $\frac{V^2}{c^2} = 0$, luego:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x' - 0}{\sqrt{1 - 0}} = x'$$

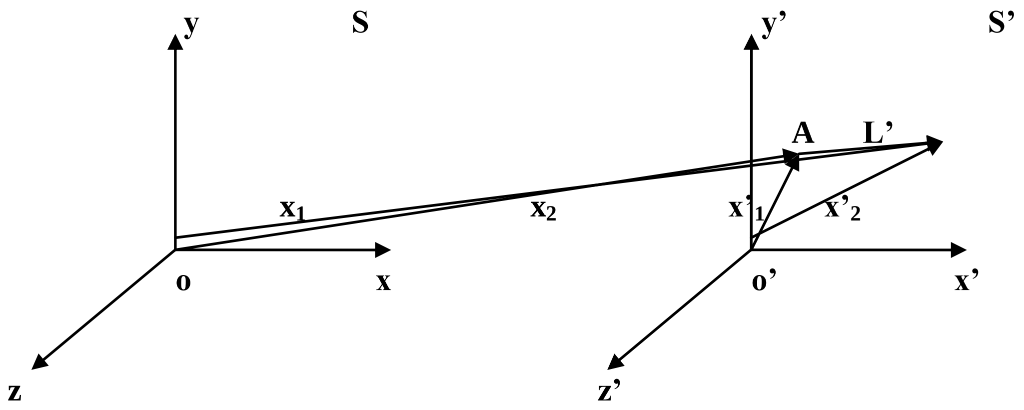
$$z = z'$$

$$y = y'$$

$$t = \frac{t' - 0}{\sqrt{1 - 0}} = t'$$

Problema 2: determinar la ecuación de transformaciones de una longitud L.

Para ello consideremos una barra que se mueve a una velocidad V en un sistema S’ medida respecto a otro marco referencial inercial S, las posiciones extremas de esta barra están indicadas en el esquema como x_1 y x_2.



De donde:

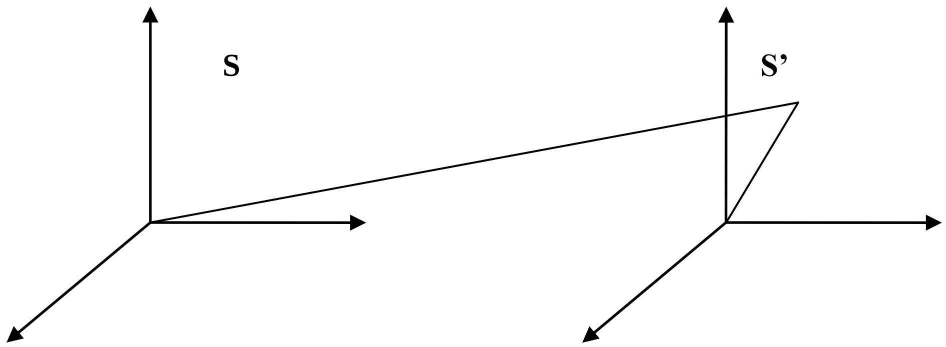
$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$, como además: $L_0 = x_2 - x_1$

$$L_0 = \frac{x'_2 + Vt' - x'_1 - Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c}}}$$

Finalmente: $L_o = \frac{L'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Se concluye entonces que:
El observador en S’ “ve” un objeto con una longitud L.
Por otro lado el observador en S “ve” el mismo objeto con una longitud L_0, donde L_0<L, lo que se expresa diciendo que el objeto visto desde otro marco de referencia inercial experimenta una contracción debido a la velocidad que experimenta.

Problema 3: Determinar la ecuación de transformación de un tiempo t asociado a un suceso que ocurre en un mismo lugar x'. ¿Qué intervalo de tiempo esta asociado al observador S?



Definamos: t'_1: tiempo de inicio del fenómeno ocurrido en S'.
t'_2 : tiempo final del fenómeno observado en S'.
t_1 : tiempo de inicio del fenómeno ocurrido en S.
t_2 : tiempo final del fenómeno observado en S.

Se tiene entonces:

$$t_1 = \frac{t'_1 + x'_1 \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{t'_2 + x'_2 \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

El intervalo de tiempo que transcurre mientras se observa el desarrollo del mismo en S es:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + x'_2 \frac{V}{c^2} - t'_1 - x'_1 \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Finalmente: $$\Delta t_0 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Δt_0= intervalo de tiempo que transcurre mientras se observa el desarrollo del evento en S.
$\Delta t'$= Intervalo de tiempo que transcurre mientras se observa el desarrollo del evento en S'.

Esto supone que para un observador en S' el tiempo transcurre mas lentamente que para el observador en S.

Si ahora suponemos que el marco referencial S' se mueve con una velocidad muy próxima a la de la luz, entonces la expresión $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \to 0$ (tiende a cero), entonces Δt_0, se indetermina, se hace excesivamente grande.

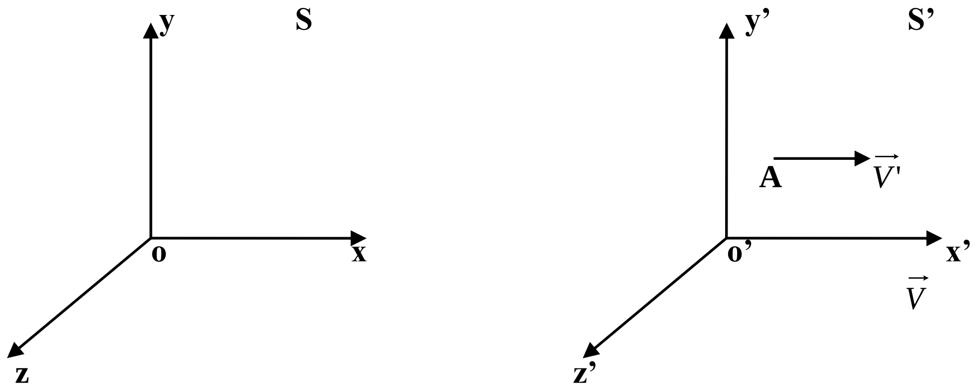
Esta expresión es el modelo matemático que expresa la "dilatación del tiempo".

¿Qué ocurriría si los seres humanos actuaran como partículas moviéndose a velocidades cercanas a la de la luz?

¿Qué ocurriría con nuestra limitada concepción del tiempo?

Problema 4: Un punto Ase mueve a una velocidad V medida por O . Determinar una ecuación para la velocidad V' que mediría el observador O'.

Consideremos la situación:



Para el observador en S que mide las tres componentes de la velocidad de A, obtiene los valores:

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}$$

Mientras que para el observador en S', obtiene los parámetros**:**

$$V'_x = \frac{dx'}{dt}$$

$$V'_y = \frac{dy'}{dt}$$

$$V'_z = \frac{dz'}{dt}$$

Como de acuerdo al primer postulado, las leyes físicas no dependen del observador inicial.

Pero: $x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$, y’=y y z’=z, $t' = \dfrac{t - x\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$

Diferenciando, se obtiene:

$dx' = \dfrac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$, dy’=dy, y dz’=dz, $dt' = \dfrac{dt - \dfrac{V}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$

Luego entonces: $Vx' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx - dt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c}}} \times \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{dt - \dfrac{V}{c^2}dx}$

$Vx' = \dfrac{dt - Vdt}{dt - \dfrac{V}{c^2}dx}$, simplificando por dt

$Vx' = \dfrac{1 - V}{1 - \dfrac{V}{c^2} \times \dfrac{dx}{dt}}$, simplificando por dt,

Donde $\dfrac{dx}{dt} = V_x$, que es la velocidad medida por el observador S sobre el sistema inercial S’ en relación al eje x, por lo tanto esta última expresión queda:

$Vx' = \dfrac{1 - V}{1 - \dfrac{V}{c^2} \times Vx}$ transformación relativista de la velocidad.

De manera similar:

$$Vy' = \frac{dy'}{dt`} = \frac{dy - dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \times \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt - \frac{V}{c^2}dy} = \frac{Vy\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}Vy}$$

$$Vz' = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz - dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \times \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt - \frac{V}{c^2}dz} = \frac{Vz\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}Vz}$$

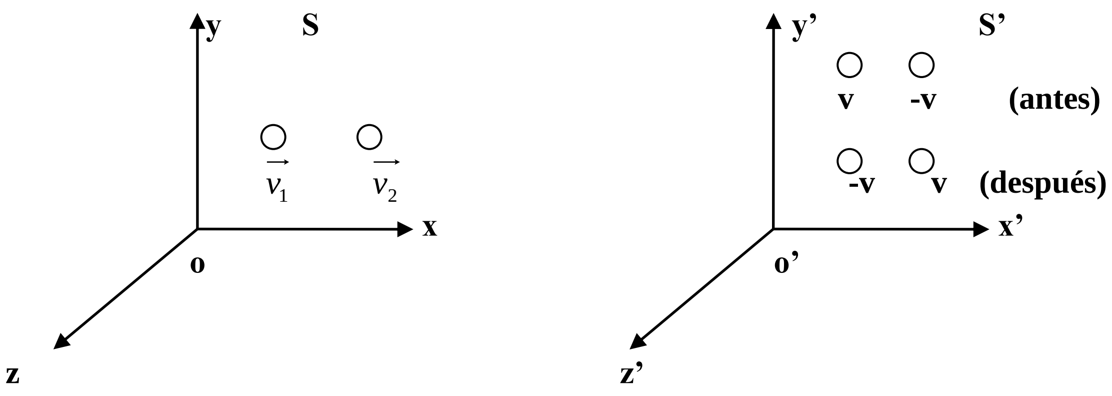
Y por otro lado.

$$Vx = \frac{Vx'+V}{1+Vx'\frac{V}{c^2}}, \quad Vy = \frac{Vy'+V}{1+Vy'\frac{V}{c^2}}, \quad Vz = \frac{Vz'+V}{1+Vz'\frac{V}{c^2}}$$

LA RELATIVIDAD DE LA MASA: Las cantidades físicas como la LONGITUD y EL TIEMPO, tienen significado solamente cuando se especifica el marco de referencia en que son medidos. Fijados este marco, podemos, mediante las transformaciones de Lorente, computar los valores de estas cantidades cuando se las mide en otro marco de referencia, en movimiento rectilíneo uniforme con respecto al marco especificado. Un acontecimiento en el tiempo y el espacio, una colisión entre dos cuerpos, tendrá diferentes aspectos en diferentes marcos referenciales. Sin embargo, de acuerdo con los postulados de la relatividad especial, las leyes del movimiento a que se llega observando acontecimiento de este tipo, deben tener las mismas formas de interpretación física en todos los marcos de referencia.

Ahora consideremos una colisión elástica (una colisión donde se conserva la energía cinética) entre dos partículas A y B, presenciada por observadores situados en marcos referenciales inerciales S y S’ (están en movimiento rectilíneo uniforme relativo).

Las propiedades de A y B son idénticas cuando se las determina en marcos de referencia que se encuentran en reposo. Los marcos S y S’ están orientados según la figura que se indica, y S’ se mueve en el sentido +OX con respecto a S a la velocidad V.



v_1 **se asocia a v**

v_2 **se asocia a –v**

v_1 **y v_2 :** velocidades asociadas a las partículas que colisionan según el observador S

v , –v : velocidades de las partículas que colisionan según el observador S`

S` se mueve con velocidad constante con respecto a S.

Las velocidades a que chocan las partículas medidas con respecto a S

Están relacionadas según el factor de Lorentz $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Si asociamos un marco de referencia S’’ a la partícula, entonces S’’ no traslada con respecto a la partícula (va asociado a la partícula).entonces de acuerdo a las

Expresiones para la transformación de velocidades, tenemos:

Como $v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}$

$$Vy = \frac{Vy`\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c}}}{1+Vx\dfrac{V}{c^2}}$$ **,** relacionando las ecuaciones se obtiene:

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{v}{c^2}^2}\sqrt{1-\dfrac{V}{c^2}^2}}{1+v`\dfrac{V}{c^2}}$$

Para un observador en S durante el choque:

$m_1 + m_2 = M$

$m_1 v_1 + m_2 v_2 MV$

DEMOSTRACIÓN: Partiendo del factor de Lorentz $\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$, y desarrollando las ecuaciones de las velocidades: Vx, Vy, Vz, se obtiene:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v'V}{c^2}}$$

v corresponde a la velocidad de una partícula que medirá el observador en S en función de la velocidad v’ que medirá el observador en S’, V corresponde a la velocidad de S’ con respecto a S.

Aplicando transformaciones algebraicas se tiene:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v'V}{c^2}}$$

$$\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v'V}{c^2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'V}{c^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$$, que conduce a:

$$\sqrt{1-\frac{(v'+V)^2}{c^2(1+\frac{v'V}{c^2})^2}}=\sqrt{\frac{c^2(1+\frac{v'V}{c^2})^2-(v'+V)^2}{c^2(1+\frac{v'V}{c^2})^2}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{c^2(c^2+\frac{v'V}{c^2})^2}{c^2}-(v'+V)^2}{c^2(\frac{c+v'V}{c^2})^2}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{c^2(c^2+v'V)^2}{c^4}-(v'+V)^2}{c^2\,\frac{(c^2+v'V)^2}{c^4}}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{(c^2+v'V)^2}{c^2}-(v'+V)^2}{\frac{(c^2+v'V)^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{(c^2+v'V)^2-c^2(v'+V)^2}{c^2}}{\frac{(c^2+v'V)^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{\frac{(c^2+v'V)^2-c^2(v'+V)^2}{(c^2+v'V)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{c^4+2c^2v'V+v'^2V^2-c^2v'^2-2c^2v'V-c^2V^2}{(c^2+v'V)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{c^4+v'^2V^2-c^2v'^2-c^2V^2}{(c^2+v'V)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{c^2(c^2-v'^2)-V^2(c^2-v'^2)}{(c^2+v'V)^2}}$$

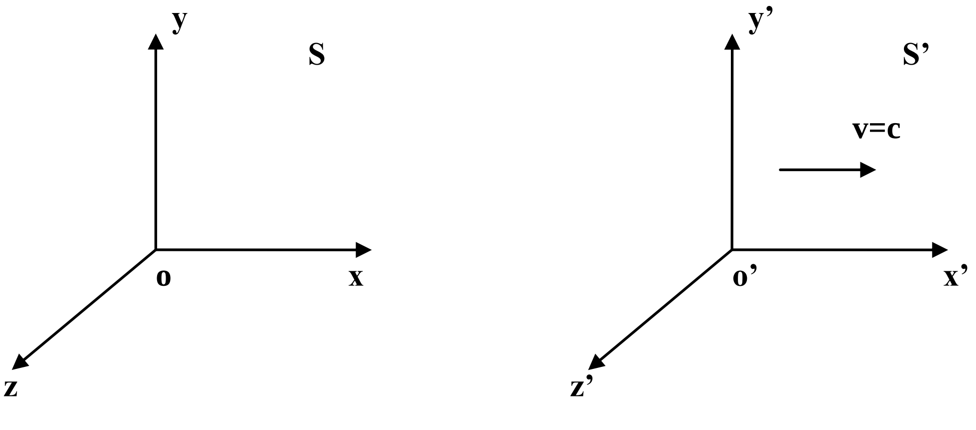
$$\sqrt{\frac{(c^2-v'^2)(c^2-v'^2)}{(c^2+v'V)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{(c^2-v'^2)(c^2-v'^2)}{c^4(1+\frac{v'V}{c^2})^2}}$$, es decir:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)}}$$, lo que finalmente queda:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)}}\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}$$

Problema 5: Demostrar que la velocidad máxima es c suponiendo que en el marco referencial S' ocurre un fenómeno luminoso de velocidad v y que el marco referencial inercial para este fenómeno medido desde S' es V y que el marco referencial S' se mueve a la velocidad de la luz con respecto S.



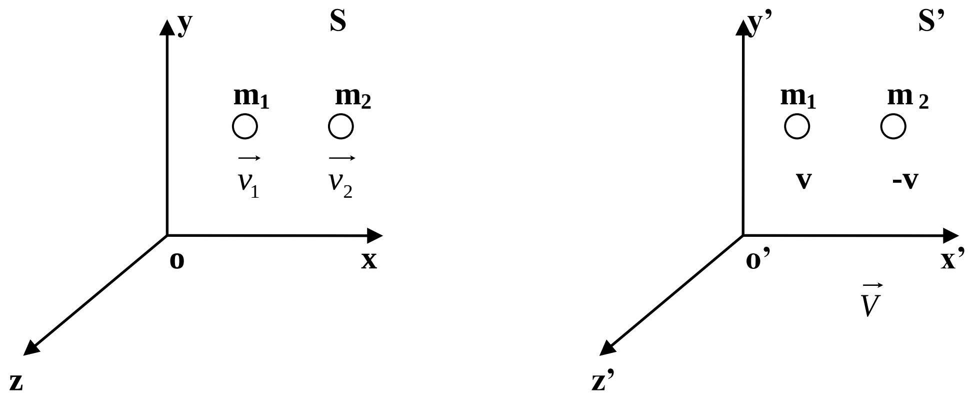
Como: $Vx=\frac{Vx'+V}{1+\frac{VxV}{c^2}}$, entonces $Vx=\frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}}$, es decir: $Vx=\frac{2c}{\frac{c^2+c^2}{c^2}}$

$$Vx = \frac{2c}{\left[\frac{(2c^2)}{c^2}\right]} = \frac{2c}{2} = c$$

Problema 6: DEDUCIR QUE LA MASA RELATIVISTA ESTÁ DADA POR LA EXPRESIÓN:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Consideremos un choque elástico entre dos partículas m_1 y m_2 observadas desde dos marcos de referencia inerciales.



$\vec{v}_1$ **Velocidad de m_1 antes del choque desde S**
$\vec{v}_2$ **Velocidad de m_2 antes del choque desde S**
v **velocidad de m_1 antes del choque desde S'**
v' velocidad de m_2 después del choque desde S'
$\vec{V}$ **velocidad del sistema inercial S' con respecto a S**

Como $v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}$

Se tiene que: $v_1 = \dfrac{v \ \ + V}{1 + \dfrac{vV}{c^2}}$ y $v_1 = \dfrac{v + V}{1 - \dfrac{vV}{c^2}}$

Como se trata de un choque elástico (es decir se conserva la energía cinética ante-durante y después del choque y también el momentum lineal)

Antes: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$

Donde la velocidad de las partículas juntas del choque equivale a la velocidad V del sistema, ya que si las partículas están inicialmente en reposo a S', después de colisionar y quedar juntas y en reposo, atendiendo al principio de conservación.

Sustituyendo: $v_1 = \dfrac{v \ \ + V}{1 + \dfrac{vV}{c^2}}$ y $v_1 = \dfrac{v + V}{1 - \dfrac{vV}{c^2}}$, en :

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$, queda:

$m_1 \left[\dfrac{v+V}{1+\dfrac{vV}{c^2}} \right] + m_2 \left[\dfrac{-v+V}{1-\dfrac{vV}{c^2}} \right] = (m_1 + m_2)V$, dividiendo por m_2

$$\frac{m_1}{m} \left[\frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}} \right] + \left[\frac{-v+V}{1-\frac{vV}{c^2}} \right] = \frac{m_1}{m_2} V + V$$

$$\frac{m_1}{m} \left[\frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}} - V \right] = V - \left[\frac{-v+V}{\frac{1-vV}{c^2}} \right]$$

$$\frac{m_1}{m} \left[\frac{v+V-v(1+\frac{vV}{c})}{1+\frac{vV}{c^2}} \right] = \left[\frac{V(1-\frac{vV}{c^2})-(-v+V)}{1-\frac{vV}{c^2}} \right]$$

$$\frac{m_1}{m} \left[\frac{v+V-v-\frac{vV}{c}}{1+\frac{vV}{c^2}} \right] = \left[\frac{V-\frac{vV}{c^2}+v-V}{1-\frac{vV}{c^2}} \right]$$

$$\frac{m_1}{m} \left[\frac{V-\frac{vV}{c}}{1+\frac{vV}{c^2}} \right] = \left[\frac{v-\frac{vV}{c^2}}{1-\frac{vV}{c^2}} \right] \text{ Dividiendo por } \frac{1}{v-\frac{vV}{c^2}}$$

$$\frac{m_1}{m} \left[\frac{1}{1+\frac{vV}{c^2}} \right] = \frac{1}{1-\frac{vV}{c^2}}$$

$$\frac{m_1}{m}\left[\frac{1+\frac{vV}{c^2}}{1-\frac{vV}{c^2}}\right]$$, pero como $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{(1-\frac{v'^2}{c^2}}}{(1+\frac{v'V}{c^2})}\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}$

Donde V_1, esta relacionada con v y
V_2, esta relaciona con –v. luego:

$$\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}\sqrt{(1-\frac{V^2}{c^2})}}{(1+\frac{vV}{c^2})},\quad 1+\frac{vV}{c^2}=\frac{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}\sqrt{(1-\frac{V^2}{c^2})}}{(1-\frac{vV}{c^2})},\quad 1+\frac{vV}{c^2}=\frac{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$$

De las ecuaciones anteriores se establece que:

$\frac{1+\frac{vV}{c^2}}{1-\frac{vV}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$, retomando la expresión: $\frac{m_1}{m}=\left[\frac{1+\frac{vV}{c^2}}{1-\frac{vV}{c^2}}\right]$ y reemplazando se

Obtiene:

$\frac{m_1}{m}=\left[\frac{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\right]$, ahora si m_2 esta en reposo, entonces $v_2=0$, y la expresión quedara:

$\frac{m_1}{m_0}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$, o bien: $\frac{m_1}{m_0}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$, que finalmente se expresa

por : $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

expresa la masa de la partícula que se mueve a una velocidad V en relación a una masa en reposo m_0

PROBLEMA 6: desarrollar la segunda ley de Newton en el marco de la relatividad especial:

F=Ma

F=M $\frac{dv}{dt}$

$$F=\frac{d}{dt}\left[\frac{m_{0v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$F=m_0\left[\frac{1}{c^2}\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{-3}{2}}v^2\frac{dv}{dx}+\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{-1}{2}}\frac{dv}{dx}\right]$$

Que corresponde a la segunda ley de Newton para la mecánica relativista.

Por otro lado se que: $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Además P=mv (momentum lineal)

$$P=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}v$$

Como F= $\frac{dP}{dt}$ F= $\frac{d(mv)}{dt}$, F= $\frac{d}{dt}\left[\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$

Como F= $\frac{d(mv)}{dt}=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$

Si el momentum lineal varia es que hay una fuerza actuando sobre la partícula, lo que evidencia que se ha realizado un trabajo sobre ella.
Ahora si P es constante, se dice que la partícula es “libre”.
El aumento de energía es:

$$\int\frac{dT}{dt}=\int\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

O bien: $T = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + k$

Para evaluar el valor de k:
Si v=0, entonces T=0 (el aumento de energía cinética es cero, entonces el trabajo es nulo)

$0 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{0}{c^2}}} + k$, entonces $K = -m_0 c^2$, reemplazando, se obtiene:

$T = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{0}{c^2}}} - m_0 c^2$, como $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, se obtiene:

$T = mc^2 - m_0 c^2$

$T = c^2 (m - m_0)$

Es decir EL INCREMENTO DE ENEGIA CORRESPONDE A UNA RELACION ENTRE LA DIFERENCIA ENTRE LAS MASAS.

Consideremos dos sistemas S y S' y definamos una energía total E con respecto al sistema S como:

$E = T + m_0 c^2$, donde $m_0 c^2$ es la energía de una masa en reposo y T es trabajo que se realiza sobre la partícula y que corresponde como ya se dedujo a:

$T = c^2 (m - m_0)$, reemplazando, se obtiene:

$E = c^2 (m - m_0) + m_0 c^2$

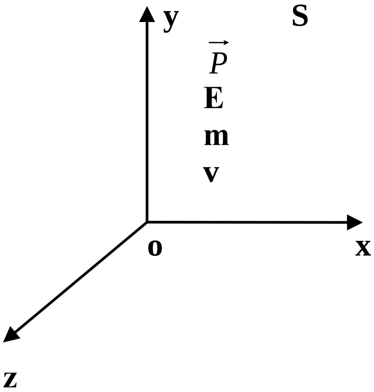
$E = c^2 m - c^2 m_0 + m_0 c^2$

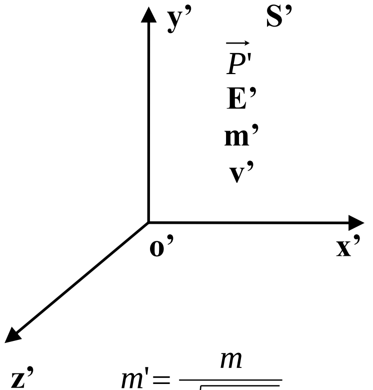
$E = c^2 (m - m_0) + m_0 c^2$

$E = mc^2$, donde $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$,. Por lo tanto: $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

PROBLEMA 7:
Encontrar un modelo matemático que relacione la energía con la cantidad de movimiento.

Consideremos los sistemas S y S' en los cuales se miden los parámetros físicos que se indican:





$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

P: corresponde al momentum lineal
E: energía cinética
M: masa
V: velocidad

Si el momentum lineal varia, significa que actúa una fuerza resultante sobre la partícula, lo que evidencia que se ha desarrollado un trabajo, que se expresa por la diferencia de energía:

Para: $S: p^2 = m^2c^2 - m_0c^2$

Para: $S': p'^2 = m'^2\, c^2 - m_0c^2$, de donde : $p^2 = m^2\,\frac{c^4}{c^2} - m_0c^2$

Para: $p'^2 = m'^2\,\frac{c^4}{c^2} - m_0c^2$, lo que lleva a: $p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0c^2$

Para: $p'^2 = \frac{E'^2}{c^2} - m_0c^2$, que esta de acuerdo al primer postulado

Ahora bien, para; S $P^2x + P^2y + P^2z - \frac{E^2}{c^2} = -m_0c^2$

Y para S’: $P'^2\,x + P'^2\,y + P'^2\,z - \frac{E'^2}{c^2} = -m_0c^2$

De acuerdo a las trasformaciones de Lorentz se puede escribir $P'\,x = \frac{Px - \frac{VE}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v}{c^2}}}$

Py’=Py , P’z=Pz, $E' = \frac{E - Vpx}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Además, si: $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ y aplicando $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{v'V}{c^2}}}$

v: velocidad de la partícula en S
v': velocidad de la partícula en S'
V: velocidad del S' con respecto a S

$m\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=m'\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c'^2}}$, $m'=m\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}$, obteniéndose:

$$m=m'\frac{\left(1+\dfrac{v'V}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

m: masa de la partícula asociada a S
m': masa de la partícula asociada a S'
v: velocidad de la partícula asociada S
v':velocidad de la partícula asociada S'
c: velocidad de la luz

Además se sabe que:

$E=T+m_0c^2$,donde m_0c^2, energía de la partícula en resposo

$E=(m-m_0)c^2+m_0c^2$

$E=mc^2-m_0c^2+m_0c^2$

$E=mc^2$

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$E=\sqrt{\frac{m_0^2c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$E=\sqrt{\frac{m_0^2c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}(c^2+v^2-v^2)}$$

$$E=\sqrt{m_0c^2(\frac{c^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}+\frac{v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}-\frac{v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}})}$$

$$E = \sqrt{m_0 c^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}$$

$$E = \sqrt{m_0 c^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} \right)}$$

$$E = \sqrt{m_0 c^2 \left(c^2 + \frac{v^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2} \right)}$$

$$E = \sqrt{m_0 c^4 + \frac{m_0^2 v^2 c^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}}$$

$$E = \sqrt{m_0 c^4 + \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 c^2}$$

$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + P^2 c^2}$, finalmente:

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + P^2 c^2}$$

RESUMEN CONCEPTUAL:

POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL:

1.- Las leyes de la Física son las mismas para todo sistema inercial. Por lo tanto, todo movimiento es relativo. La velocidad de los objetos solo puede darse en relación a otros cuerpos. Es imposible determinar la velocidad absoluta de un objeto.

2.- La rapidez de la luz en el vacío “c”, tiene el mismo valor para cualquier observador, independiente del movimiento de la fuente o del movimiento del observador.

Estos postulados conducen a predecir lo siguiente:

VARIACIÓN DE LA MASA: La medida de la masa de un objeto que esta en reposo con respecto al observador se denota por m_0, y se llama masa en reposo del objeto. Si un objeto se mueve con una rapidez “v”, pasando frente a un observador, el objeto tiene, para el observador una masa aparente:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Donde c=2,988×10^8 m/s=3×10^8m/s, que es la velocidad de la luz en el vacío (espacio libre).

Note que m→∞, cuando, v→c, el factor indicado en el denominador del segundo termino , se llama efecto relativista.

RAPIDEZ LÍMITE: Cuando v=c, la masa del objeto se vuelve infinita. Para ello se requeriría de una fuerza infinita para acelerarlo hasta la velocidad de la luz. Por lo que se concluye que ningún objeto puede acelerarse hasta la velocidad de la luz c, y si c es el límite superior para la rapidez.

EL MOMENTO LINEAL: De una partícula de masa m en reposo m_0 y rapidez v es:

$$p = \frac{m_0 v}{1-\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m v$$

CONVERSIÓN MASA-ENERGÍA: Si la energía de un objeto cambia en ΔE , entonces su masa cambia en una cantidad dada por:

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

Esta relación se escribe con mucha frecuencia como: E=mc^2, la relación es verdadera para cualquier cambio de energía.
Cuando un objeto se le suministra energía cinética trasnacional, su masa aparente m se mueve mayor que su masa en reposo m_0 la relación es :

$$EC_{traslacional} = (m - m_0)c^2$$

Si la rapidez de un objeto no es muy grande, entonces esta se reduce a la expresión usual

$$EC_{traslacional} = \frac{}{2} m_0 v^2 \qquad V<<c$$

LA ENERGÍA TOTAL: De una partícula (es decir, su energía de masa en reposo $m_0 c^2$ mas su energía cinética trasnacional, se representa por E. Dos expresiones convenientes para E son:

$$E = mc^2 , \text{ y } E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

DILATACIÓN DEL TIEMPO: Dos relojes simultáneos localizados uno junto al tro marcan el tiempo al unísono. Sin embargo, si uno de los relojes se acelera hasta una velocidad v y se mueve pasando frente al reloj estacionario y frente a un observador estacionario, entonces le parecerá a este observador estacionario que el reloj marca el tiempo con cierta lentitud. Mientras que el reloj estacionario marca el tiempo t_x, el observador medirá que el reloj en movimiento marca un tiempo $t_m < t_x$, donde:

$$t_m = t_x \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

El tiempo que tarda en ocurrir un evento, cuando es registrado por un observador estacionario en el sitio del evento se llama TIEMPO PROPIO. Todos los observadores en movimiento registraran un tiempo mayor que el que toma en ocurrir el evento.
De esta manera el tiempo propio para la duración de un evento es la medida más pequeña de tiempo para este evento.

SIMULTANEIDAD: supóngase que para un observador, dos eventos ocurren en diferentes localidades, pero al mismo tiempo. Los eventos son simultáneos para este observador, sin embargo, en general, estos no son simultáneos para un segundo observador en movimiento relativo al primero.

CONTRACCION DE LA LONGITUD: supóngase que un objeto tiene una longitud L_0 de componente x cuando esta en reposo respecto de un observador (L_0 se demoniza longitud propia) si al objeto se le da una rapidez v en la dirección de x, al observador estacionario le parecerá haberse acortado en la dirección de x (pero no en las direcciones y, z). este observa la longitud x como si fuera de: $L = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$

FORMULA PARA SUMAR VELOCIDADES: supóngase que un cohete espacial se mueve en la dirección c con una velocidad v en relación a la tierra. El cohete dispara una partícula en la dirección x con una rapidez v' relativa al cohete. La rapidez de la partícula relativa a la tierra no es v'+v (debido a que esto podría ser mayor que c). en lugar de eso la rapidez de la partícula medida por un observador en la tierra esta dada por : $\dfrac{v + v'}{1 + \left(\dfrac{vv'}{c^2}\right)}$

Note que aun cuando v=v'=c, esta rapidez es solo c. esto concuerda con el hecho de que la partícula no puede ser acelerada hasta una rapidez mayor que c.

APLICACIONES A PROBLEMAS

1.- ¿Qué tan rápido debe moverse un objeto para que su masa aparente sea 1% mayor a su masa en reposo? (0,14c)
2.- calcule la masa aparente de un electrón que viaja la mitad de la rapidez de la luz
($1.05x10^{-30}\,kg$)
3.- Si un gr. de material pudiera convertirse íntegramente en energía ¿Cuál debería ser el valor de la energía producida, si el costo por KW*h es de 10ctv?
($2.500.000)

4.- Un objeto de 2kg. Se levanta desde el piso hasta una mesa que esta a 30cm. Sobre este a que cantidad se incrementa la masa del objeto debido a su incremento en su EP?

($6.5x10^{-17}\,kg$)

5.- Un electrón es acelerado desde el reposo a través de una unja diferencia de potencia de 1.5MV y en consecuencia adquiere un energía de 1.5Me determine:

5.1 su rapidez

5.2 su masa aparente

($2.90x10^{8}\, {}^{m}\!/_{s}$,$2.67x10^{-30}\,kg$)

6.- Determine la energía requerida para dar a un electrón un rapidez de 0.9 de la luz, partiendo del reposo (0.663 MeV)

7.- Demuestre que $EC = (m - m_0)c^2$, se, reduce, a: $EC = \frac{1}{2}m_0v^2$ cuando v es mucho menor que c. para ello considere que: EC es

$$(m - m_0)c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} m_0 \right) c^2 = \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

8.- Un electrón se mueve con velocidad relativista perpendicular a un campo magnético de 0.20T si su trayectoria es circular, con un radio de 15cm. Determine:

-el momento

- la rapidez

- la energía cinética del electrón

($4.8x10^{-19}\,kg * {}^{m}\!/_{s}$, 0.9999.900 MeV)

9.- El sol irradia energía igualmente en todas direcciones. En la posición de la tierra ($r=1.5x10^{11}$m), la radiación de sol es de $1.4KW/m^2$. ¿Qué cantidad de masa pierde el sol por día debido a la radiación? ($2x10^{30}$kg)

10.- Se mide un haz de partículas radioactivas cuando se dispara en un laboratorio. Se encuentra que, en promedio, cada partícula “vive” durante un tiempo de $2x10^{-8}$s; después de ese tiempo, la partícula cambia a una nueva forma. Cuando las mismas partículas estaban en reposo en el laboratorio, “y bien” cierra en promedio $0.75x18^{-8}$s. ¿Qué tan rápido se mueven las partículas de haz? ($2.78x10^{8}$m/s)

11.- Dos gemelos tienen 25 años de edad; entonces uno de ellos sale en un viaje por el espacio a una velocidad aprox. constante el gemelo que va en el cohete espacial mide el tiempo con un reloj exacto. Cuando regresa a la tierra, su reloj le indica que tiene 31 años de edad, mientras que su gemelo que se quedo en la tierra tiene 43 años. ¿Cuál fue la velocidad del cohete espacial? ($2.83x10^{8}$m/s)

12.- dos células que se dividen el la tierra cada 10seg. Inician un viaje de la tierra hacia al sol($R=1.50x10^{11}$m, de camino), en una nave espacial que se mueve a 0.85c. ¿Cuántas células deberían existir cuando la nave espacial se estrelle con el sol? ($2.1x10^{9}$celdas)

13.- En una nave espacial, una persona sostiene una regla de medir cuando se dispara y pasan por la tierra con una rapidez v paralela a la superficie de la tierra ¿Qué notara la persona que va en la nave cuando la regla se gira de la posición paralela a posición perpendicular, con respecto al movimiento de la nave? (para la persona en la nave la medida de la regla permanece constante, para alguien que observa en la tierra diría que la regla mide $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ cuando esta paralela al movimiento de la nave y un metro cuando esta perpendicular al movimiento de esta)

14.- Una nave moviéndose a 0.95 c viaja desde la Tierra hasta la estrella alfa centauro la cual esta 4.5 años luz (1 año luz es la distancia que recorre la luz en un año es igual a $9.5x10^{15}$m) ¿Qué tan largo será el viaje para:
14.1 Un reloj en la Tierra.
14.2 Un reloj en la nave.
14.3 ¿Qué tan lejos está la Tierra de la estrella de acuerdo a los ocupantes de la nave?
14.4 ¿Cuál es su cálculo de rapidez que llevan? ($1.51x10^{8}$s, $4.71x10^{7}$s, $1.34x10^{16}$m, $2.84x10^{8}$m/s)

15.- Cuando un cohete pasa por su orbita por la Tierra con una rapidez v, manda un pulso de luz por delante de él. ¿Qué tan rápidamente se moverá el pulso de luz de acuerdo a una persona que se encuentre sobre la Tierra? (con una rapidez c, por el segundo postulado de la relatividad especial)

16.- ¿A qué rapidez debe moverse una partícula para que m sea $2m_0$? ($2.6x10^{8}$m/s)

17.- Una partícula esta viajando con una rapidez v tal que: v/c=0.9900. Determine: m/m_0 para la partícula. (7.1)

18.- Calcule la energía en reposo de un electrón, es decir, la energía equivalente a su masa en reposo (me=$9.11x10^{31}$kg)

19.- Determine la velocidad de un electrón de 0.1 MeV, de acuerdo con la relatividad clásica y especial ($1.4x10^{9}$m/s, $1.8x10^{8}$m/s)

20.- ¿cuánta masa gana un protón al ser acelerado hasta una energía cinética de 500 MeV? ($8.8x10^{-28}$kg)

21.- La energía total de una partícula es doble de su energía en reposo. Determinar su velocidad ($\frac{1}{2}c\sqrt{3}m/s$)